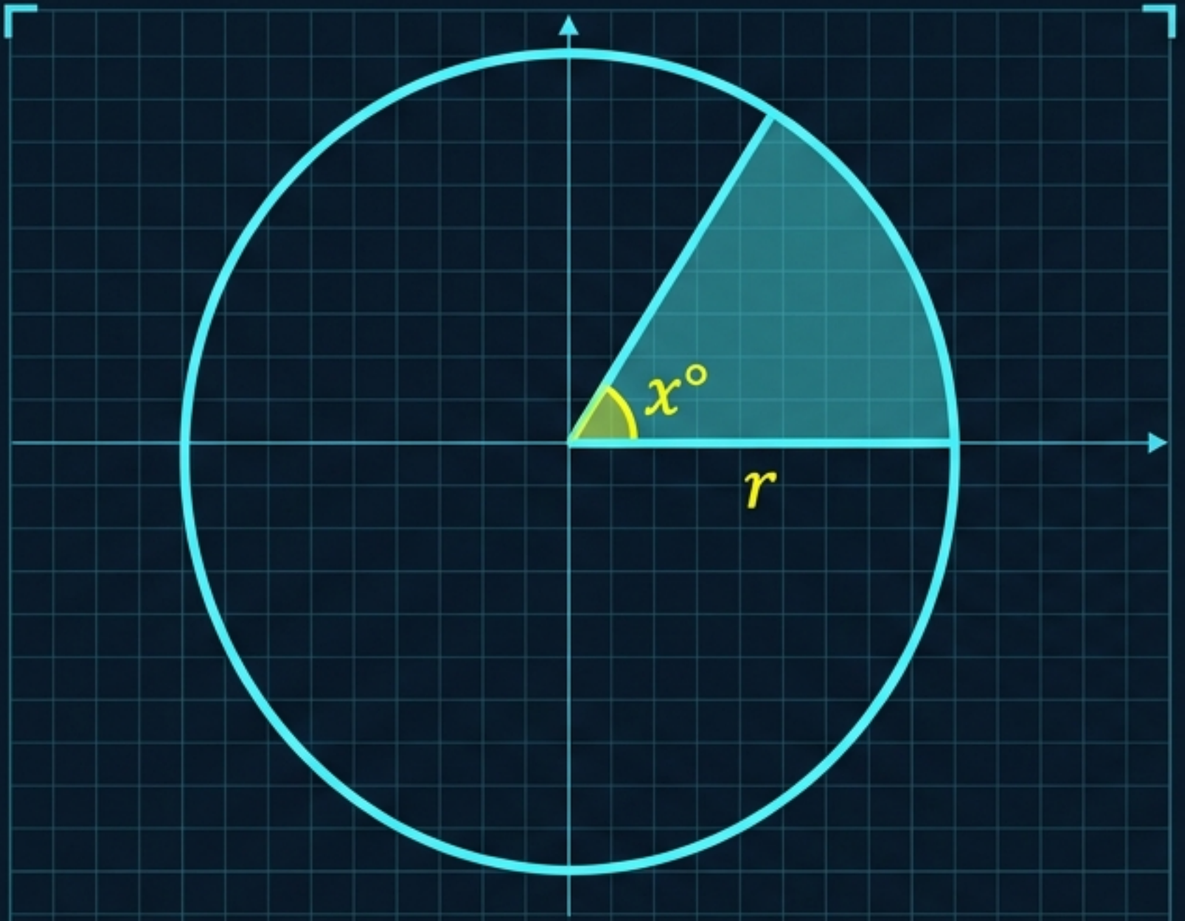


一整圈 (360°)
→ 圓周長 $2\pi r$
圓面積 πr^2

比例縮放 ($\times \frac{x}{360}$)

弧長 $2\pi r \times \frac{x}{360}$
面積 $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

課本基礎運算

條件：半徑 $r=16$，圓心角 $90°$

$$\text{弧長} = 2\pi(16) \times \frac{90}{360} = 8\pi$$

$$\text{面積} = \pi(16^2) \times \frac{90}{360} = 64\pi$$

短檢核 (Quick Check)

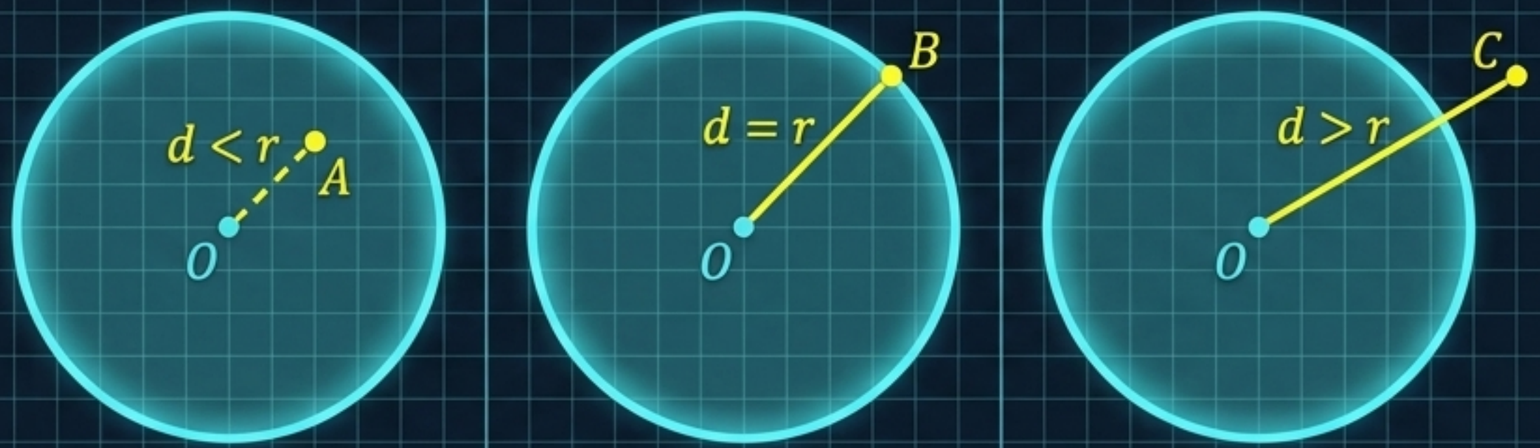
[Q]：若半徑 10，弧長 4π，求圓心角與面積？

[A]：$4\pi = 2\pi(10) \times \frac{x}{360} \Rightarrow x=72°$。面積 $= \pi(10^2) \times \frac{72}{360} = 20\pi$。

[來源出處｜課習一本通-學用 PDF:18,22 印刷:18,22｜類題演練本-教用 PD Gemini Notebook

判斷點位置的唯一指標：點到圓心距離 (d) vs 半徑 (r)

在圓內	在圓上	在圓外
$d < r$	$d = r$	$d > r$



例題判定

條件：圓 O 直徑 $10 \Rightarrow r = 5$。點 D，E，F 到圓心距離為 7，5，4。

$D(7) > 5 \rightarrow$ 圓外

$E(5) = 5 \rightarrow$ 圓上

$F(4) < 5 \rightarrow$ 圓內

短檢核 (Quick Check)

[Q]：圓 O 直徑為 6，若 $\overline{OP} = 3$，判斷 P 點位置？

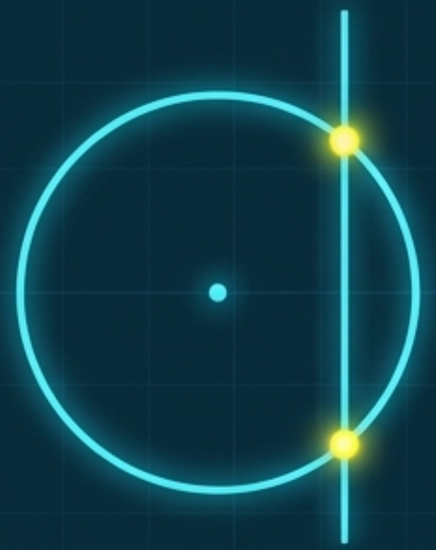
[Q]：圓 O 直徑為 6，若 $\overline{OP} = 3$，判斷 P 點位置？

[A]：直徑 $6 \Rightarrow r = 3$。因為 $\overline{OP} = 3 = r$，故 P 點在圓上。

[來源出處｜購買一本通-學用 PDF:18,22 印刷:18,22｜翰林講練本-教用 PD Gemini Notebook

直線與圓心距離 (d) 決定交點數量。切線是「交點由 2 變 0」的極致臨界狀態。

割線 (Secant)



$d < r \rightarrow$ 2 個交點

切線 (Tangent)



$d = r \rightarrow$ 1 個切點

不相交 (Disjoint)



$d > r \rightarrow$ 0 個交點

例題判定

條件：圓 O 直徑 13 ⇒ $r = 6.5$。直線 L_1, L_2, L_3 距離為 5, 6.5, 13。

判定：

d=5 < 6.5 ⇒ L_1 (割線)

d=6.5 = r ⇒ L_2 (切線)

d=13 > 6.5 ⇒ L_3 (不相交)

短檢核 (Quick Check)

[Q]：圓 O 直徑 11，圓心到 L 距離 6，求交點數？

[A]：r=5.5。距離 6 > 5.5 ($d > r$)，直線在圓外，交點數為 0。

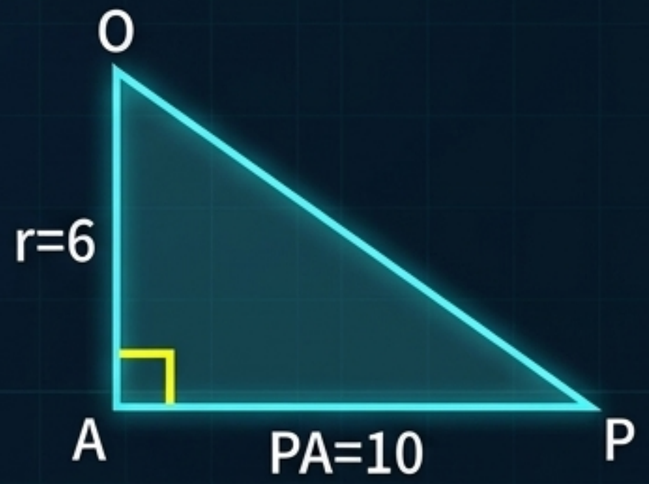
[來源出處｜類題演練本-教用 PDF:32 印刷:32｜課習一本通-學用 PDF:1
Gemini Notebook

核心定律：切線 L 必垂直於過切點的半徑 OP。



邏輯說明：(反證法概念) 如果 OP 不是最短垂直距離，那就會存在另一個更短的距離小於 r，導致 L 穿過圓變成**割線**（兩交點），這與切線定義矛盾。故 OP ⊥ L。

幾何運算



利用畢氏定理

$$PO = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

[Q]：PA 切圓 O 於 A，r=7，OP=25，求 PA？

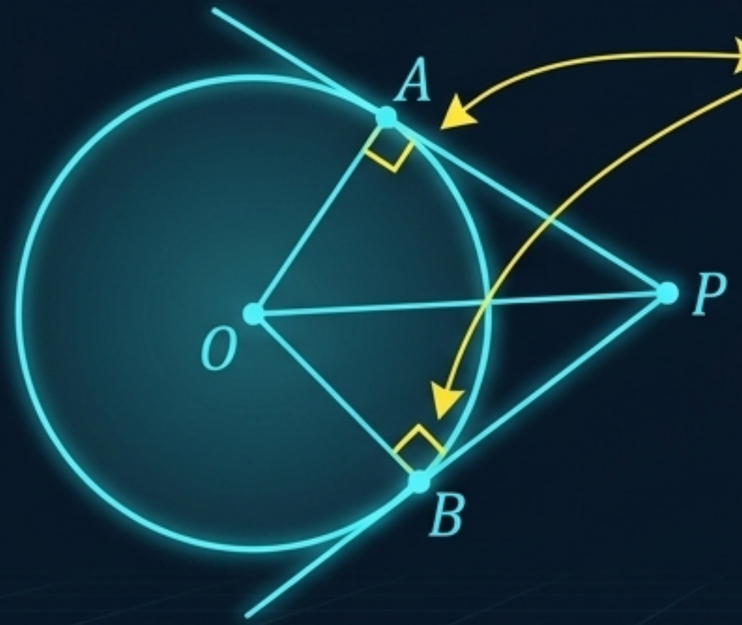
[A]：因為 PA ⊥ OA，所以 $PA = \sqrt{(25^2 - 7^2} = \sqrt{(625-49)} = \sqrt{576} = 24$。

[來源出處 | 課習一本通-學用 PDF:19 印刷:19 | 類題演練本-教用 PDF:36 印刷:36]

Gemini Notebook

自圓外一點 P 向圓作兩切線，切線段必定等長，且連心線平分夾角。

證明 Tearrdown



證明結構 (RHS 全等)：

1. $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ (切線性質)
2. $OA = OB = r$ (半徑)
3. $OP = OP$ (公用斜邊)

結論：$\Delta OAP \cong \Delta OBP$
→ $PA = PB$ 且 OP 平分 $\angle APB$。

例題 (Example)：

條件：$\angle APB = 50°$，求 $\angle POB$？

推導：OP 平分 $\Rightarrow \angle OPB = 25°$。

在直角 ΔOBP 中，

$\angle POB = 90° - 25° = 65°$。

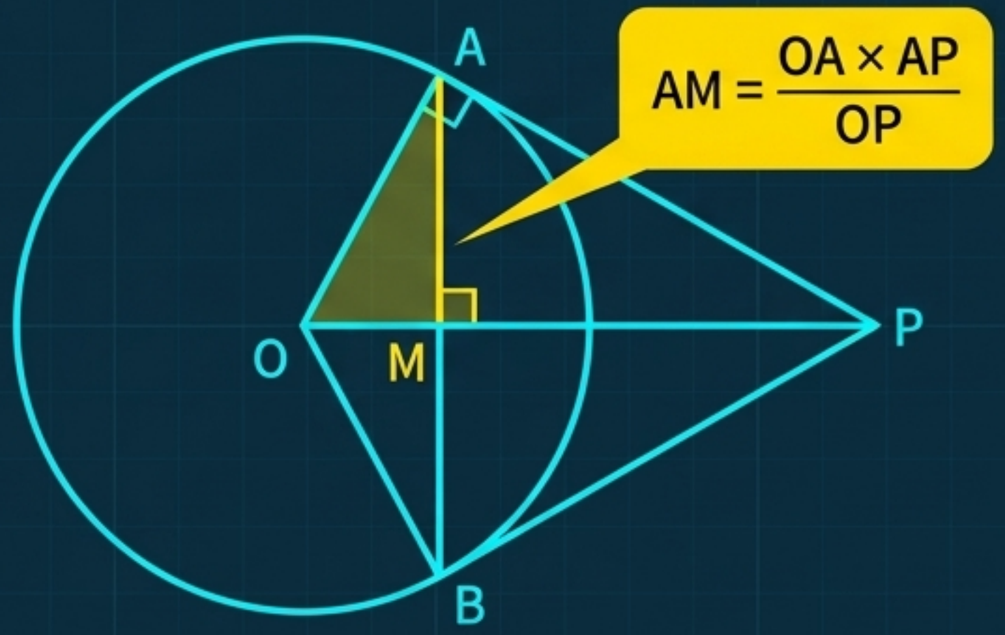
[Q]: $\angle APB = 40°$，求 $\angle BOA$？

[A]: 四邊形 $OAPB$ 內角和 $360°$。$\angle A = \angle B = 90°$，故 $\angle BOA = 360° - 180° - 40° = 140°$。

[來源出處 | 課習一本通-學用 PDF:19,21,23 印刷:19,21,23]

Gemini Notebook

連接兩切點 A, B 的弦，必被連心線 OP 垂直平分。其一半長度正是 △OAP 的斜邊高。



條件：半徑 r=12 (即 OA=12)，連心線 OP=20。

步驟 1：畢氏定理求切線段 $AP = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$。

步驟 2：斜邊高 $AM = \frac{12 \times 16}{20} = \frac{48}{5}$。

步驟 3：弦長 $AB = 2 \times AM = \frac{96}{5}$。

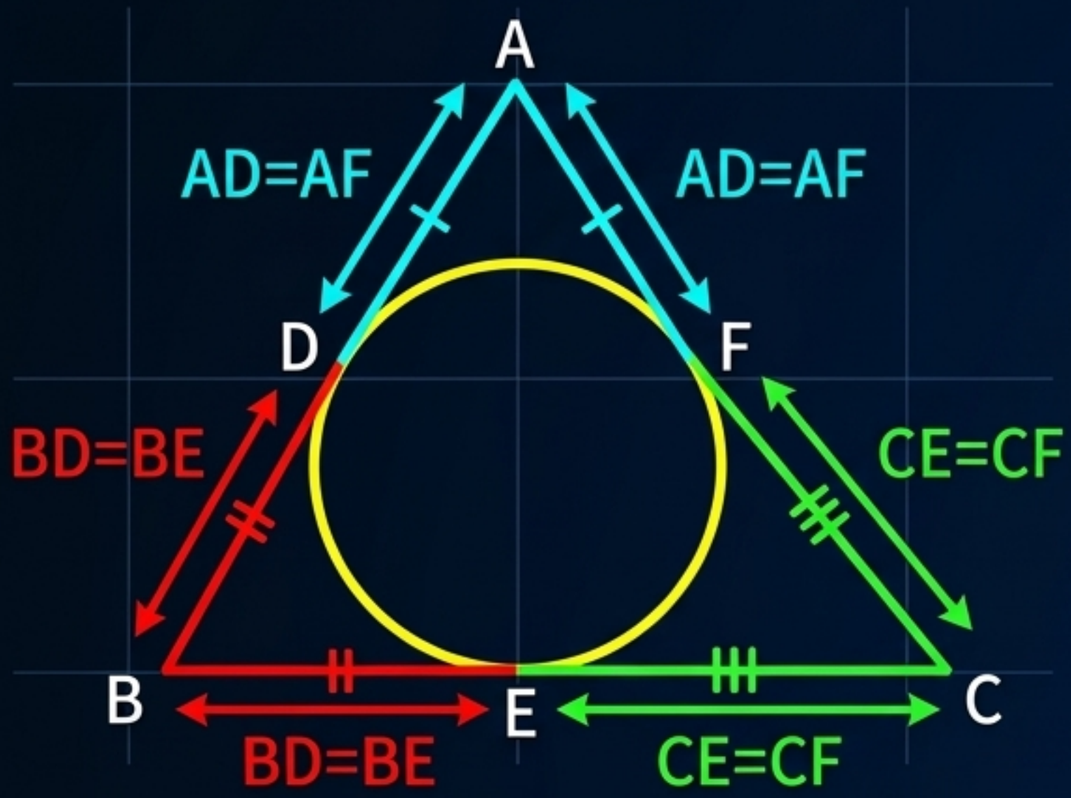
[Q]：r = 15，AP = 8，交於 D，求弦 AB 長？

[A]：$OP = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$。$AD = \frac{15 \times 8}{17} = \frac{120}{17}$。$AB = 2 \times AD = \frac{240}{17}$。

[來源出處｜類題演練本-教用 PDF：36 印刷：36]

Gemini Notebook

多邊形外切於圓（內切圓），其邊長可完全拆解為多組相等的「同點切線段」。



條件：△ABC 切於 D,E,F。
AB=12, BC=10, AC=14。求 AF？

代數推導：

設 AF=x ⇒ AD=x

BD = 12-x ⇒ BE=12-x

CF = 14-x ⇒ CE=14-x

底邊 BC = BE+CE ⇒ 10 = (12-x) + (14-x)

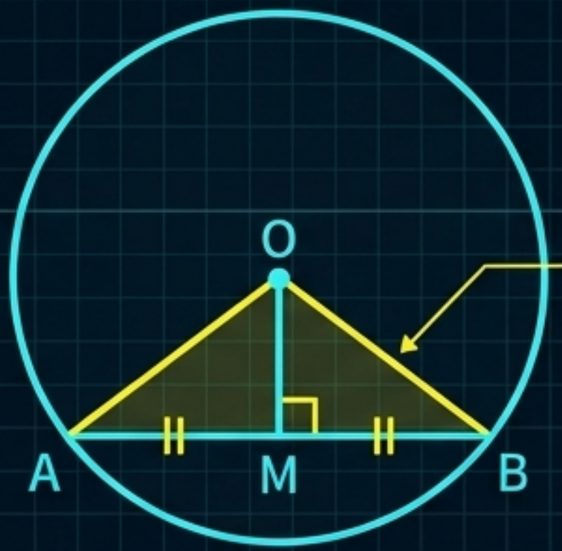
解方程式：10 = 26 - 2x ⇒ 2x=16 ⇒ x=8。故 AF=8。

[Q]：等腰△ABC 切於 P,Q,R，AB=AC，AR=2, CP=4，求 AB？
[A]：AR=AQ=2；CP=CQ=4。AC = AQ+CQ = 2+4=6。因等腰，故 AB=AC=6。

[來源出處｜課習一本通-學用 PDF:21,2 Gemini Notebook

Knowledge Atlas

弦與圓心的幾何羈絆——中垂線定理。
通過圓心且垂直弦的直線必平分該弦；
反之，弦的中垂線必過圓心。



基於 △OAM ≅ △OBM (RHS)，
完美證明 AM=BM。

基礎檢驗：圓 O 直徑 22。

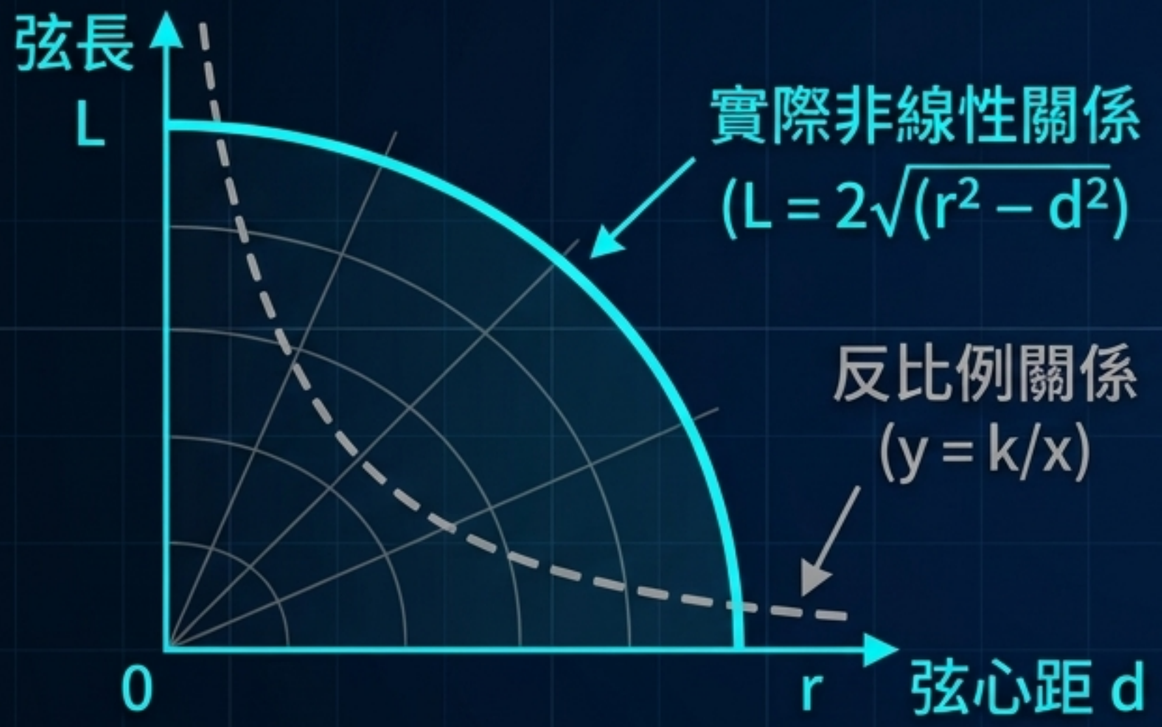
問答：
最長弦為何？(直徑 = 22)。
圓心到圓周距離為何？(半徑 = 11)。

[Q]：名詞釐清：直線截圓周的部分稱為？圓周兩點連線段稱為？
[A]：直線截出的部分為「弧」；連線線段為「弦」。

[來源出處｜基礎GO-學用 PDF:1 印刷:1｜課習一本通-教用
Gemini Notebook

弦長與弦心距的變動關係。

【警告】：同圓中，距離愈長弦愈短，但絕非反比例關係！



條件：

圓 O 半徑 r = 9，弦 AB = 10，求弦心距 OC。



精確運算：

一半的弦 AC = 5。

弦心距 $OC = \sqrt{9^2 - 5^2}$

$= \sqrt{81 - 25} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$。

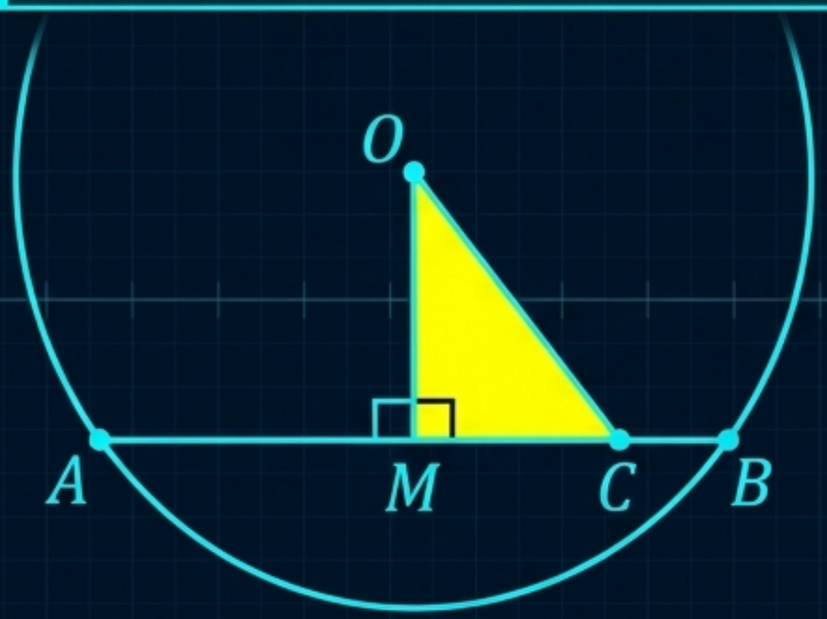
[Q]：判斷對錯：同圓中，弦心距愈長，所對應的弦愈長。

[A]：❌(錯誤)。距離越遠，被截弦長越短。最長弦(直徑)的弦心距為 0。

[來源出處｜課習一本通-教用 PDF:19 印刷:19｜課習一本通-學用 P Gemini Notebook

非中點的距離定位術：雙重畢氏定理。

Step 1	定位：找弦中點 M，算出偏移量 MC。
Step 2	計算：在小直角 $\triangle OMC$ 中求斜邊 OC。



條件：AC=5, BC=1，弦心距 OM=2。
求 OC？

推導：

弦總長 6 ⇒ 中點 $AM = BM = 3$。

點 C 的偏移：

$$MC = AC - AM = 5 - 3 = 2。$$

最後衝刺：△OMC 中，

$$OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}。$$

[Q]：若 AC = 3, BC = 1，弦心距為 2，求 OC？

[A]：$AB = 4 \Rightarrow AM = 2$。 $MC = 3-2 = 1$。$OC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$。

[來源出處｜課習一本通-學用 PDF:21,23 印刷:21,23]

Gemini Notebook